Kontinuirane slučajne varijable.

Diskretne slučajne varijable povezane su s prebrojavanjem u nekom pokusu. One primaju konačan skup vrijednosti (ili možda beskonačan, ali je tada nužno prebrojiv i diskretan). Kod tih slučajnih varijabla možemo zamišljati da je jedinična masa (ukupna vjrojatnost) raspoređena na brojevnom pravcu u tih konačno točaka (odnosno prebrojivo mnogo točaka). Međutim, u pokusima se prirodno javlja i **mjerenje**. Skup brojeva kojima se (teoretski) zapisuju rezultati mjerenja nije ni konačan niti diskretan, već neki interval u skupu realnih brojeva . Pojasnimo to malo na primjerima.

1. Slučajna varijabla koja mjeri temperaturu u nekom pokusu (u stupnjevima) teoretski može primiti rezultat u intervalu [-273?, + infty>. Naravno da svaki mjerni uređaj ima diskretnu mjernu skalu, (pa bi tako mjerenje njime postizavalo samo konačan skup vrijednosti) međutim, iz teoretskih razloga mi ne možemo isključiti ni jednu međuvrijednost (koje nema na tom, ali možda ima ili će biti na nekom drugom mjernom uređaju). Pitanje mjerne skale za temperaturu nije uopće jednostavno pitanje (neke teorije prihvaćaju diskretan, a neke kontinuiran karakter temperature; u što tu ne možemo ulaziti; napominjemo samo da se mi, iz teoretskih razloga, držimo da je temperatura kontinuirana).
2. Slučajna varijabla koja mjeri postotak neke tvari u nekoj smjesi teoretski može primiti svaku vrijednost intervalu [0,100] (tu vrijedi slična napomena kao i prije, što, u sličnim prigodama nećemo više spominjati).
3. Slučajna varijabla koja mjeri relativni udio neke tvari u nekoj smjesi teoretski može primiti svaku vrijednost u intervalu [0,1].
4. Grješka pri mjerenju teoretski može biti svaki realni broj itd.

Primjer 1. Zamislimo da rezultati mjerenja mogu ravnopravno biti brojevi u intervalu [0,2] i da slučajna varijabla X registrira taj rezultat. Tada je vjerojatnost (jedinična masa) jednoliko raspoređena na intervalu [0,2]. Naime možemo zamisliti da smo jediničnu masu razmazali jednoliko po tom intervalu.

Mora biti $p(X=a) = 0$,

za svaki *a* iz intervala [0,1] (jer kad bi za jedan *a* ta vrijednost bila pozitivna, ona bi morala biti pozitivna za sve brojeve iz intervala, jer su oni ravnopravni zbog jednolike raspoređenosti vjerojatnosti; međutim tada bi ukupna vjerojatnost bila beskonačna, a mora biti 1). Tako imamo **naizgled paradoksalnu** situaciju: vjerojatnost u svakoj točki je 0, a ukupna je vjerojatnost 1.

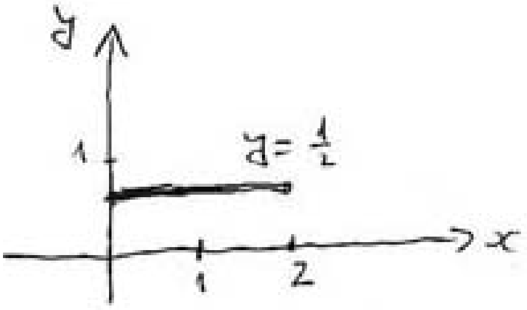
S druge strane,

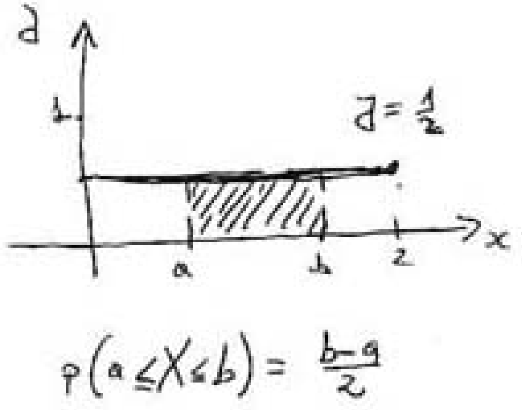
$p(a<X<b) = (b-a)/2$,

za svaka dva broja *a,b* iz intervala za koja je $a<b$. To je zato što je ukupni interval duljine 2, a interval [a,b] je duljine *b-a*, a pripada mu vjerojatnost proporcionalno duljini (intervalu duljine 1 pripada vjerojatnost 1/2).

Matematički model za ovakvu razdiobu vjerojatnosti jest konstantna funkcija:

$f(x):=1/2$, za x u intervalu [0,2].





Ta je funkcija **pozitivna** na tom intervalu i **površina** ispod njena grafa je 1. Da se odredi vjerojatnost da slučajna varijabla *X* poprimi rezultat između brojeva *a* i *b*, treba duljinu intervala od *a* do *b*, tj. broj (b-a) pomnožiti s 1/2 , tj. s vrijednošću funkcije, a to je isto što i izračunati površinu ispod grafa funkcije *f* od x=a, do x=b.

Kažemo da je slučajna varijabla X neprekinuta (kontinuirana) ako prima svaku vrijednost na nekom intervalu (i svaku s vjerojatnošću 0).

Ta definicija nije matematički potpuno zadovoljavajuća, ali će za nas biti dovoljna.

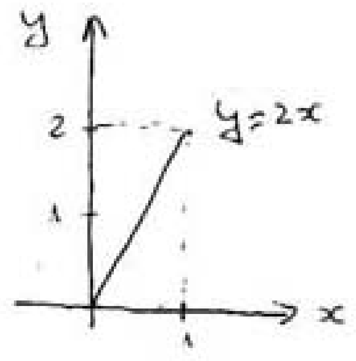
Primjer 2. Opišimo kontinuiranu slučajnu varijablu *X* koja prima vrijednosti u intervalu [0,1] i kojoj je vjerojatnost raspoređena proporcionalno udaljenosti od ishodišta (a ne jednoliko kao u prethodnom primjeru). Izračunajte vjerojatnost da *X* poprimi vrijednost između 0.3 i 0.7.

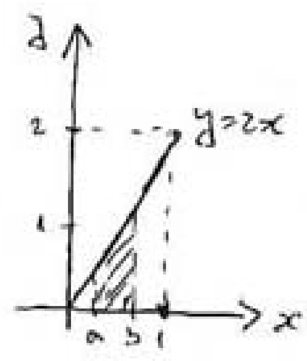
U ovom slučaju možemo zamisliti da smo jediničnu masu razmazali od x=0 do x=1, tako da se gustoća namaza povećava proporcionalno s udaljenošću od ishodišta (koja je, za svaki *x*, upravo jednaka *x*). Pripadna funkcija *f* koja to opisuje nije konstanta kao prije, već je
f(x)=cx, za x od 0 do 1,
gdje je c neka konstanta, koju ćemo odrediti ovako.
Uočimo mali interval [x,x+Δx] i zanima nas vjerojatnost da slučajna varijabla *X* poprimi rezultat na tom intervalu. Na tom intervalu funkcija *f* je približno konstantna i jednaka f(x) (na malom intervalu vrijednosti su se malo promijenile u odnosu na početnu) pa je, u skladu s prethodnim primjerom,
$p(x<X<x+\Delta x) \approx f(x)\cdot\Delta x = cx\Delta x$
Razmotrimo sad broj $p(0 \le X \le 1)$.
To je, s jedne strane, jednako 1 (ukupna vjerojatnost). S druge strane ta se vjerojatnost dobije kad bismo "zbrojili" sve doprinose na malim intervalima, a oni se dobiju, kako znamo, integriranjem izraza cxdx od x=0 do x=1 (tu Δx prelazi u dx). Dakle, $\int_0^1 cxdx = 1$ (opet je površina ispod grafa od *f* jednaka 1)
odakle dobijemo c=2, tj.
f(x)=2x, za x od 0 do 1.
Vjerojatnost da *X* poprimi rezultat između *a* i *b* dobije se slično, "zbrajanjem" malih doprinosa od x=a do x=b, tj. **integriranjem** od *a* do *b*, dakle:

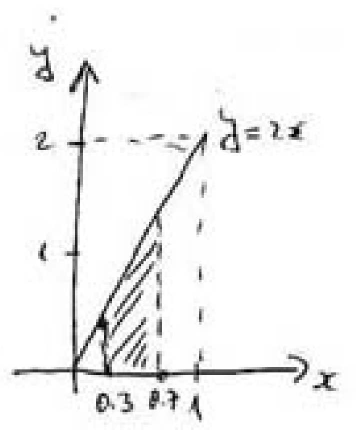
$$p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b 2x dx = x^2 \Big|_a^b = b^2 - a^2 .$$

Posebno:
p(0.3<X<0.7) = površina ispod grafa funkcije *f* od x=0.3 do x=0.7

$$= \int_{0.3}^{0.7} 2x dx = x^2 \Big|_{0.3}^{0.7} = 0.4.$$







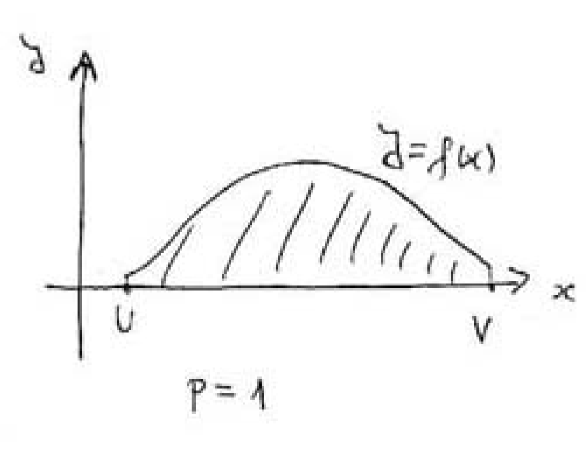
U ovim se primjerima javljala funkcija *f* koja prima vrijednosti veće ili jednake 0, koja opisuje razdiobu vjerojatnosti na intervalu.
Vidimo da je razumno definirati općenito:

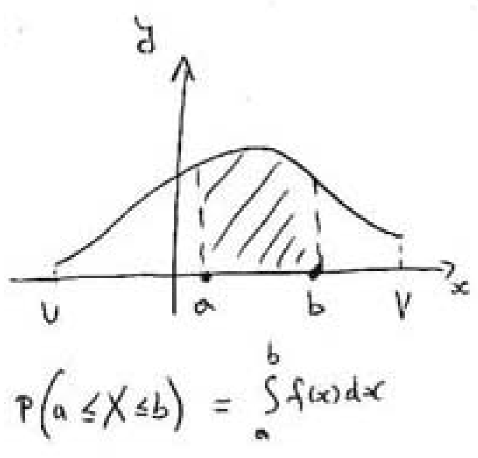
ako kontinuirana slučajna varijabla prima rezultate na intervalu [u,v] , onda je razdioba vjerojatnosti zadana nekom funkcijom *f* definiranom na intervalu [u,v] za koju vrijedi:

1. $f(x) \geq 0; x \in [u, v]$
2. $\int_u^v f(x)dx = 1$

Pri tom je vjerojatnost da ta slučajna varijabla poprimi vrijednost u intervalu [a,b] :

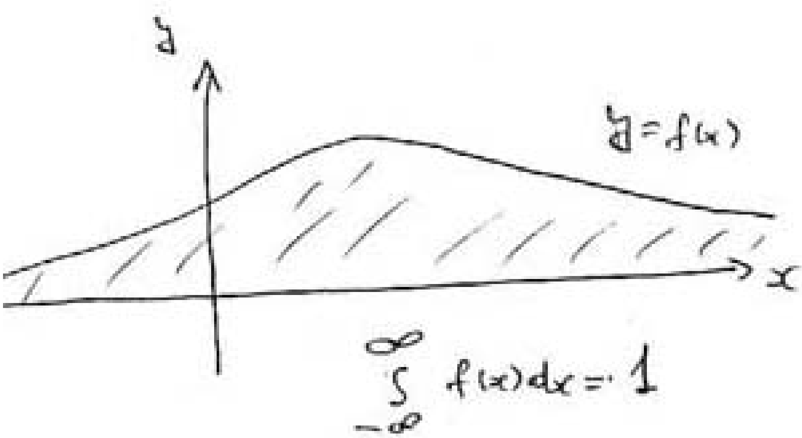
$$p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx .$$





Nekoliko komentara.

1. U našim je primjerima vjerojatnost bila raspoređena prema nekom pravilu na intervalu [u,v] . To su mogli biti i otvoreni intervali i poluintervali i beskonačni intervali i, konačno, najveći interval: cijeli skup realnih brojeva. Od sada ćemo smatrati da je **uvijek tako,** tj. da je vjerojatnost na **cijelom skupu realnih brojeva** (tj. da je funkcija *f* zadana na čitavom skupu realnih brojeva; to napravimo tako da na onom dijelu gdje nema vjerojatnosti stavimo da je vrijednost funkcije *f* jednaka 0). Zato će od sada biti:



(i) $f(x) \geq 0$, za sve realne brojeve x.

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

2. Funkciju *f* s ovim dvama svojstvima zovemo **funkcijom gustoće vjerojatnosti**.
   Dakle, svaka ovakva funkcija definira neku razdiobu vjerojatnosti kontinuirane slučajne varijable.

3. Vjerojatnost da slučajna varijabla *X,* koja ima funkciju gustoće *f,* poprimi vrijednost na intervalu [a,b], jednaka je površini ispod grafa funkcije *f* od x=a do x=b (integral).

4. Iako ima puno takvih funkcija *f,* nas će u praksi zanimati samo nekoliko takvih funkcija (odnosno nekoliko tipova ili klasa takvih funkcija, što ćemo vidjeti poslije).

5. Možemo li opravdati to da funkciju *f* možemo integrirati na svim podintervalima? Rekli smo da *f* opisuje kako je jedinična masa razmazana po *x*-osi (na početku je to bilo samo po intervalu). Razumno je pretpostaviti da dok kist vučemo neprekinuto, onda će i pripadna funkcija koja opisuje gustoću namaza biti neprekinuta. Također, razumno je pretpostaviti da ćemo, možda nekoliko puta zastati, pa potom nastaviti. Na tim mjestima funkcija *f* će možda biti prekinuta jer ćemo nastaviti razmazivanje po drugom pravilu. Tako će funkcija *f* biti **po dijelovima neprekinuta**, a kako je ukupna masa koju razmazujemo konačna, ona će imati integral na svakom podintervalu.

6. Formule 1. i 2. koje definiraju funkciju gustoće treba gledati u **analogiji s diskretnom slučajnom varijablom**. Tako je formula 1. kontinuirani analogon uvjeta:

1'. $p_i>0$, za sve *i* (vjerojatnosti su pozitivne; eventualno se može dopustiti da budu 0),
a formulu 2. kao analogon formule

2' $\sum p_i = 1$ (ukupna vjerojatnost je 1).

Jasno je da se formula za vjerojatnost da slučajna varijabla *X* poprimi vrijednost na nekom intervalu može smatrati analogijom one za diskretnu varijablu (integral od donje do gornje granice zamjenjuje prijašnje zbrajanje vjerojatnosti). Poslije ćemo vidjeti da se ta analogija provlači i dalje: na očekivanje, varijancu i sl.

Dakle, jednolika funkcija gustoće u prvom primjeru mogla bi se zapisati kao:
f(x)=1/2, za x od 0 do 2
= 0 , inače,

dok bi se linearna funkcija gustoće iz primjera 2. mogla zapisati kao:
f(x)=2x, za x od 0 do 1,
=0, inače.

Jasno je da se sve važno kod prve od ovih dviju funkcija događa na intervalu [0,2], a kod druge na intervalu [0,1].
Evo jednog primjera funkcije gustoće f koja nije jednaka 0 niti za jedan x.

Primjer 3. Pokažimo da je $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ funkcija gustoće vjerojatnosti neke slučajne varijable *X*.

Ta je funkcija očito definirana za svaki realni broj x i također je očito da je ona strogo pozitivna (time je potvrđen prvi uvjet koji mora zadovoljavati funkcija gustoće).
Da bismo potvrdili drugi uvjet moramo izračunati površinu ispod grafa funkcije *f*.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} arctgx \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})) = 1$$

Time je pokazano da je *f* funkcija gustoće vjerojatnosti.

Pogledajmo kako možemo računati vjerojatnosti na intervalima.

p(a<X<b)= $\int_a^b \frac{1}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi}(arctgb - arctga)$

To smo mogli ovako jer je pripadna funkcija gustoće *f* imala **primitivnu funkciju** (tj. funkciju kojoj je derivacija jednaka *f*) pa se računanje integrala svodi na oduzimanje dviju vrijednosti primitivne funkcije.

Zaključujemo da bi nam **bilo dobro** uvijek znati primitivnu funkciju funkcije *f*. Tako za računanje vjerojatnosti **ne bismo trebali integrirati**, već **samo oduzimati**. Kako znamo, primitivna je funkcija određena do na konstantu, što znači da kada znamo jednu, sve se ostale dobiju dodavanjem konstante. Od svih tih, **izabrat ćemo jednu** i dati joj **posebno ime**.

Definicija 1. **Funkcija distribucije vjerojatnosti** slučajne varijable *X* jest, prema definiciji, funkcija F: $R \to R$, zadana uvjetom:
F(x):=p(X<x)
(vrijednost te funkcije u realnom broju x jest vjerojatnost da ta slučajna varijabla poprimi rezultat manji od tog x).

Pokazat ćemo da je upravo ta funkcija **jedna od primitivnih funkcija** funkcije *f*. Prije toga navedimo nekoliko njenih svojstava koje proizlaze iz njene definicije.

1. očito je F rastuća (jer se povećanjem broja x ne može ukupna vjerojatnost do tog mjesta smanjiti),

2. očito je da F prima vrijednosti između 0 i 1 (jer su njene vrijednosti neke vjerojatnosti)

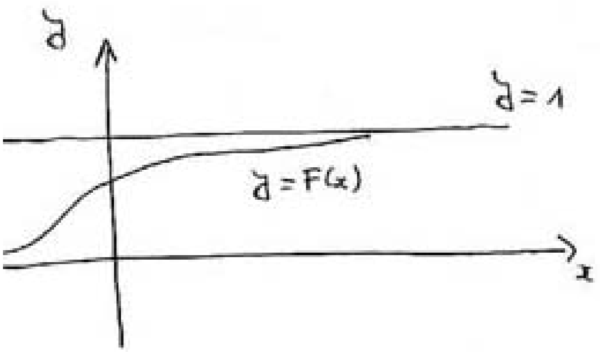
3. razumno je pretpostaviti da joj je limes kad x ide u *beskonačnost* upravo 1 (jer je ukupna vjerojatnost 1), a da joj je limes kad x ide u –*beskonačnost* jednaka 0.

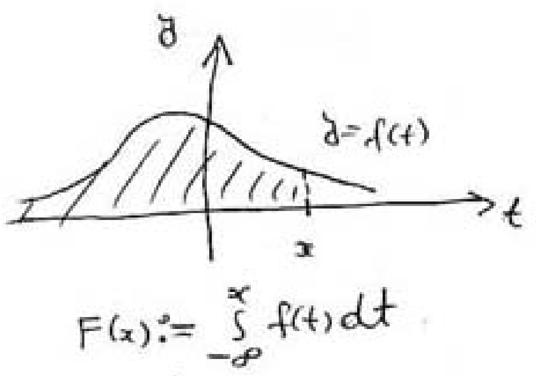
4. razumno je pretpostaviti i da je ta funkcija neprekinuta (jer malim promjenama vrijednosti x, malo se mijenja i vjerojatnost).

Sva ta svojstva izravno se dokazuju iz sljedeće veze:

$$F(x) = p(X < x) = p(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt .$$

Tu smo ispod integrala stavili varijablu t, jer je x **gornja granica** integrala (pa da ne dođe do zabune).

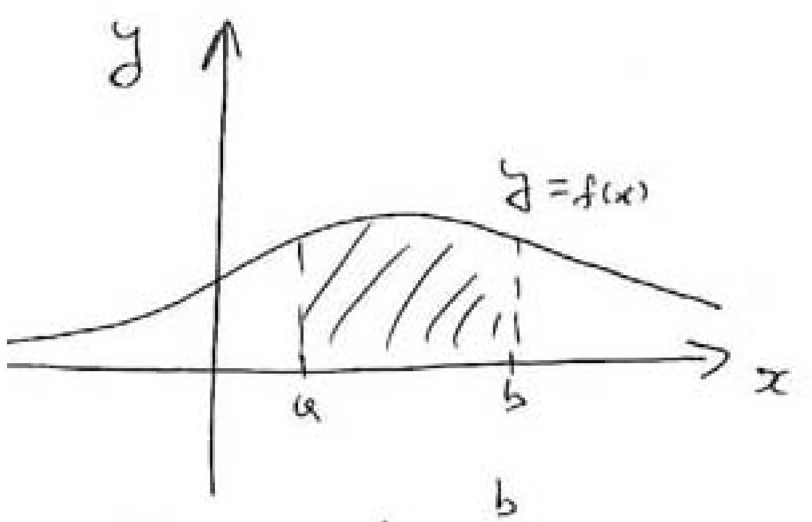




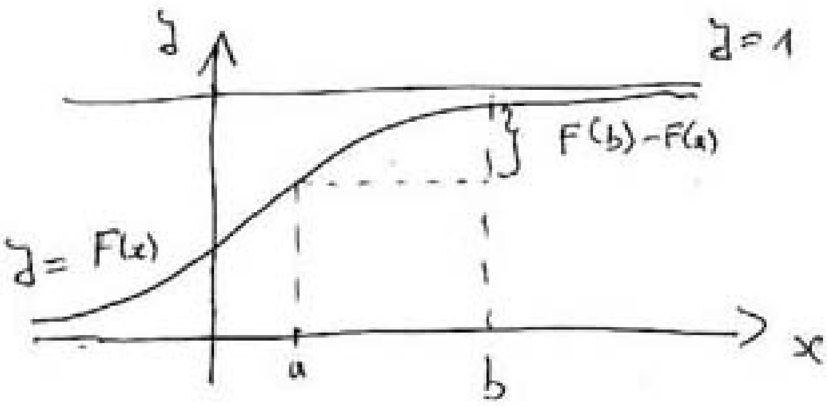
Tako smo funkciju F opisali pomoću funkcije f. Obratno, iz definicije primitivne funkcije, sada slijedi da je:
F'(x)=f(x)
za sve x osim onih u kojima funkcija f ima prekid (a takvih je mjesta konačno mnogo; dopušta se i općenitija situacija, ali mi se ograničavamo na ovu).
Dakle F je primitivna funkcija funkcije f (odnosno to je barem po dijelovima).
Sada je.

$$p(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx .$$

$$=F(b)-F(a).$$



$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx$$



$$P(a<X<b) = F(b) - F(a)$$

Primjer 4. Pokažimo da je funkcija *f* zadana s

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{za } x<-1 \\ x+1, & \text{za } -1\leq x\leq 0 \\ 1/2, & \text{za } 0<x\leq 1 \\ 0, & \text{za } x>1 \end{cases}$$

funkcija gustoće neke kontinuirane slučajne varijable *X*. Odredimo funkciju distribucije od *X* i nacrtajmo slike.

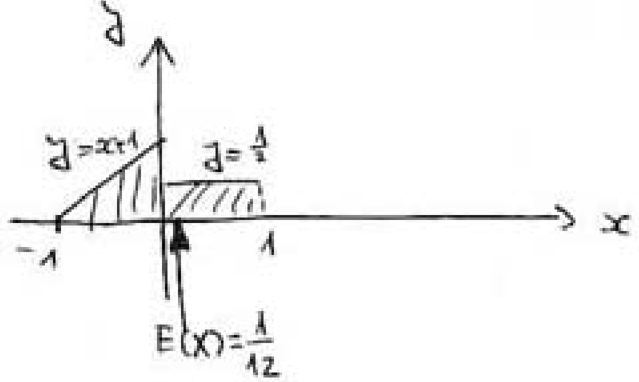
Prije rješavanja komentirajmo kako možemo zamišljati ovu funkciju. Netko je jediničnu masu razmazao po intervalu [-1,1] tako da je prvim potezom kista razmazao polovicu mase

po intervalu [-1,0] jednoliko pojačavajući gustoću namaza, potom je zastao i ostatak jednoliko razmazao po ostalom dijelu, tj. po intervalu <0,1].
Da bismo riješili problem, prvo treba pokazati da je $f(x) \geq 0$ za sve *x*, za što jedino treba provjeriti da izraz x+1 nije negativan niti za jedan *x* u intervalu [-1,0].
Kako je f(-1)=0, f(0)=1 i kako *f* raste na tom intervalu (tu je *f* linearna funkcija), *f* ne može biti negativna na tom intervalu.

Drugi je uvjet $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, što u ovom slučaju postaje

$$\int_{-1}^{0} (x+1)dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2} dx = 1,$$

što se lako pokaže, pa je f funkcija gustoće.
Napomenimo da se ovaj uvjet nije morao raditi pomoću integrala, već se mogla elementarno izračunati površina ispod grafa funkcije *f*: to je zbroj površina (pravokutnog) trokuta što ga s koordinatnim osima čini pravac s jednadžbom y=x+1 (a to je jednako 1/2) i pravokutnika što ga pravac s jednadžbom y=1/2 čini s *x*-osi od x=0 do x=1 (i to je 1/2, ukupno 1).



Funkciju distribucije određujemo pomoću formule $f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, a kako je *f* zadana po dijelovima, različitim načinima treba i integrirati po dijelovima (u ovom zadatku se čak ne treba ni integrirati već površine računati elementarno). Dakle:

F(x) = 0, za x<-1 (jer je tu i *f* nula pa nema površine)

$= \int_{-1}^{x} (t+1)dt$, za $-1 \leq x \leq 0$

=površina do 0 + $\int_{0}^{x} \frac{1}{2} dt$, za $0 < x \leq 1$

= 1 , za x>1, (jer je do x=1 ukupna površina već 1)

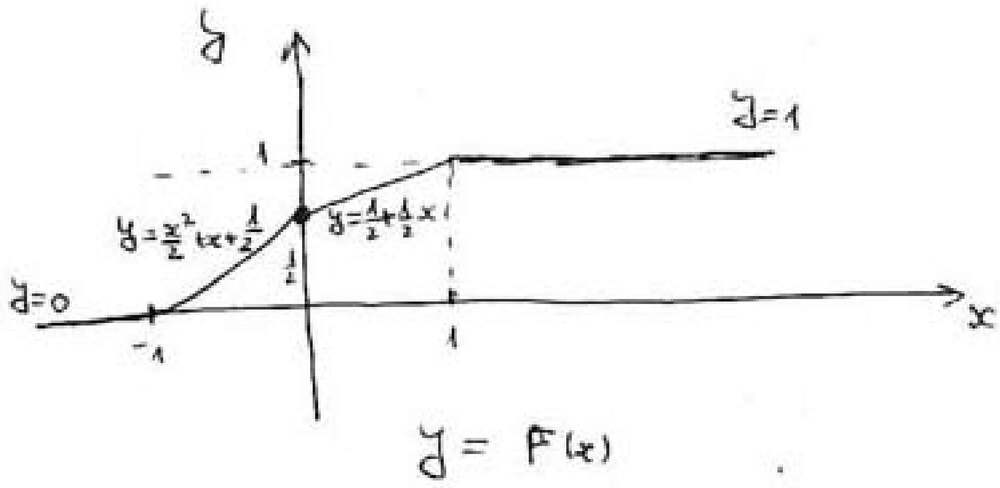
Nakon računanja dobijemo:

F(x) = 0, za x<-1

$= x^2/2+x+1/2$ za $-1 \leq x \leq 0$

= 1/2+(1/2)x za $0 < x \leq 1$

= 1 za x>1.



Napomene:

1. Na grafu funkcije *F* uočite da je neprekinuta, rastuća (ali ne strogo) i da su joj vrijednosti između 0 i 1.

2. *F* je derivabilna funkcija osim za konačno vrijednosti. To treba provjeriti samo za x=-1, x=0, x=1 tako da se gledaju derivacije s lijeva i s desna (koje uvijek postoje) i provjerava jesu li jednake.

   U x= -1, obje su derivacije 0 pa je *F* derivabilna i u –1.

   U x=0, derivacija s lijeva je 1, a s desna 1/2 pa *F* nije derivabilna u 0.

   U x=1, derivacija s lijeva je 1/2, a s desna 0 pa *F* nije derivabilna ni u 1.

Dakle za sve *x* osim za x=0 i x=1, *F* je derivabilna i vrijedi F'(x)=f(x).

3. Pokušajte sami obrazložiti zašto je kao u 2., pa poslije pogledajte objašnjenje.

Vrijednost funkcije *F* za neki *x*, dobije se tako da se izračuna površina ispod grafa funkcije *f* do toga *x*. Dokle je *f* neprekinuta, površina ispod nje se također neprekinuto mijenja, štoviše mijenja se glatko (tj. *F* ima prvu derivaciju, tj. brzinu promjene, ali ne nužno svuda i drugu derivaciju), međutim tamo gdje *f* ima prekid (skok), površina će se neprekinuto nastaviti povećavati (sa slike je jasno da površina nema skok), ali neće biti derivabilna u toj točki.

Očekivanje i varijanca kontinuirane slučajne varijable.

Ove dvije važne karakteristike definiramo **prema uzoru na diskretan slučaj**. Tamo je razdioba vjerojatnosti bila u analogiji sa sustavom čestica na pravcu, očekivanje je odgovaralu težištu sustava čestica, a varijanca momentu inercije oko težišta. Sad umjesto sustava čestica imamo jediničnu masu raspoređenu po pravcu (skupu realnih brojeva), a način kako je ona raspoređena zadan je funkcijom gustoće *f* (koja se inače, obično u mehanici, označava slovom ρ). Dakle:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

(u usporedbi s diskretnim slučajem, suma se zamjenjuje integralom, x_i s x, a p_i s f(x)dx).

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$$

U ovim formulama, a i inače kad je riječ o slučajnim varijablama, treba lučiti oznaku X (za slučajnu varijablu) od oznake x (za realnu varijablu tj. bilo koji realni broj).

Napomene:

1. Kao i prije, očekivanje ima značenje točke u kojoj je ravnoteža. Taj broj može biti i pozitivan i negativan.

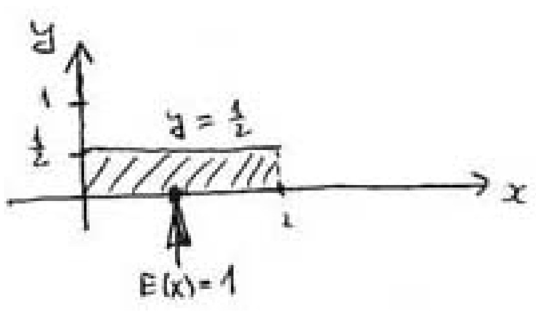
2. Varijanca, kao i prije, mjeri stupanj rasipanja oko očekivanja. Iz formule se vidi da je uvijek pozitivna (jer integriramo funkciju koja je umnožak jedne funkcije koja je kvadrat i druge koja je pozitivna, prema definiciji, tj. računamo površinu ispod grafa funkcije koji je iznad osi x). Zato, kao i prije, možemo definirati **standardnu devijaciju** slučajne varijable X:
   s(X) = $\sqrt{V(X)}$.

3. Za računanje u konkretnim slučajevima pogodnija je druga formula za varijancu (a dobije se lako iz ove, kao i prije):
   $$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - E^2(X) .$$

Tu, kao i obično, $E^2(X)$ znači $(E(X))^2$.

Primjer 5. Izračunajmo očekivanja i varijance slučajnih varijabla iz prethodnih primjera.

1. f(x) := 1/2, za x iz [0,2]
   := 0, inače.



Na osnovi slike (jednolika razdioba), odmah nam mora biti jasno da je očekivanje 1. Ipak izračunajmo.

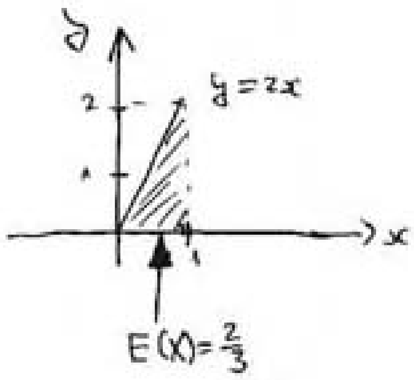
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$= \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{4}{4} = 1$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - E^2(X)$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx - 1^2 = \frac{8}{6} - 1 = \frac{1}{3}$$

2. f(x) := 2x , za x iz [0,1]
   := 0, inače.



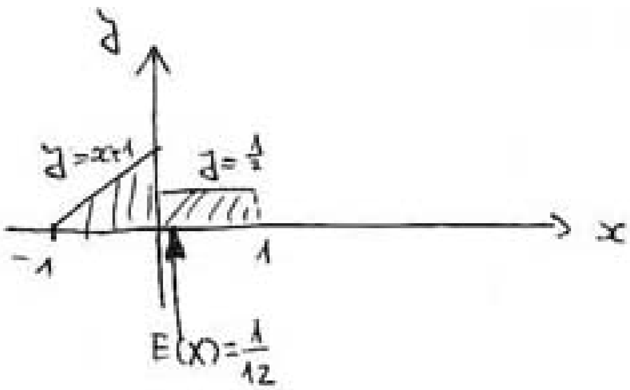
$$E(X) = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3}.$$

Iz slike je jasno zašto je očekivanje bliže 1 nego 0.

$$V(X) = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

Pokušajte dati fizikalne razloge zbog kojih je u ovome slučaju varijanca bitno manja nego u prethodnom.

3. f(x) := x+1, za x između –1 i 0
   := 1/2, za x između 0 i 1
   := 0 , inače.



Prije računanja pokušajte odoka ocijeniti hoće li očekivanje biti pozitivno ili negativno.

$$E(X)=\int_{-1}^{0}x(x+1)dx+\int_{0}^{1}x\cdot\frac{1}{2}dx=(0+1/3-1/2)+1/4=\frac{1}{12}.$$

$$V(X)=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)dx+\int_{0}^{1}\frac{x^2}{2}dx-\frac{1}{144}=(-1/4+1/3)+1/6-1/144=\frac{35}{144}.$$

Eksponencijalna razdioba.

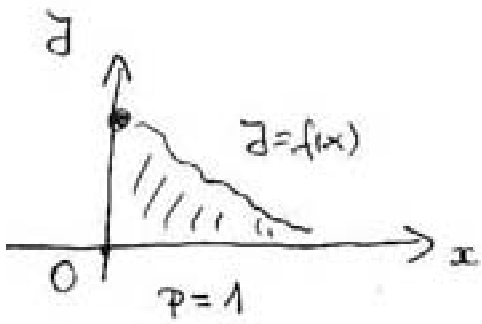
Vrijeme izmedju dvaju kvarova na nekom uređaju ili stroju, nije egzaktno određeno (odnosno mi, sa sadašnjim znanjem, nismo sposobni to odrediti), već je slučajno. Slično je s vremenom izmedju dvaju posjeta neke adrese, poziva na nekom telefonu, izmedju dvaju radioaktivnih raspada, vremenom rada do kvara neke žarulje i sl. Zato ima smisla govoriti o slučajnoj varijabli koja registrira vrijeme izmedju dvaju kvarova, trajanja neke žarulje i sl.. Kad se kaže *neke*, onda to treba pojasniti. Vrijeme trajanja ovisi o mnogim faktorima. Da bismo imali određeniju situaciju pretpostavimo da razmatramo žarulje istog proizvođača, koje su proizvedene istom tehnologijom od istog proizvođača. Ipak neke od njih imaju kraće, a neke duže vrijeme trajanja koje ne možemo lako dokučiti. ato je vrijeme trajanja slučajno izabrane takve žarulje slučajna varijabla. Da bismo sebi malo situaciju pojasnili možemo testirati mnogo takvih žarulja i tako doći do predodžbe o **prosječnom** vijeku trajanja takvih žarulja, a i o distribuciji vremena trajanja (time se bavi **statistika** i o tome ćemo više govoriti poslije).

Neka je X slučajna varijabla koja registrira vrijeme trajanja žarulje. Intuitivno je jasno da će se vjerojatnost da žarulja traje smanjivati tijekom vremena, pa je razumno pretpostaviti da je funkcija gustoće vjerojatnosti f slučajne varijable X padajuća (za pozitivne x, a za negativne, prirodno, jednaka je 0). Dakle:

f(x) je padajuća za x>0

= 0 za x<0.

Znademo još da će površina ispod grafa te funkcije biti 1.



Ima jako puno funkcija koje to zadovoljavaju, međutim, iz konkretnih ispitivanja (o kojima ćemo više govoriti u statistici), ali i iz razumnih fizikalnih pretpostavaka (o kojima nećemo govoriti), može se prihvatiti ne samo to da funkcija f pada već i da *eksponencijalno pada* (za pozitivne x). To znači da je:

$f(x) = ae^{-\lambda x}$, za $x>0$

gdje je e baza prirodnog logaritma, a λ i a pozitivni realni brojevi (drugi zato da f bude pozitivna, a prvi zato da f bude padajuća). Vezu između tih brojeva dobit ćemo ako uzmemo u obzir da je pripadna površina jednaka 1. Jednadžba:

$$a\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = 1,$$

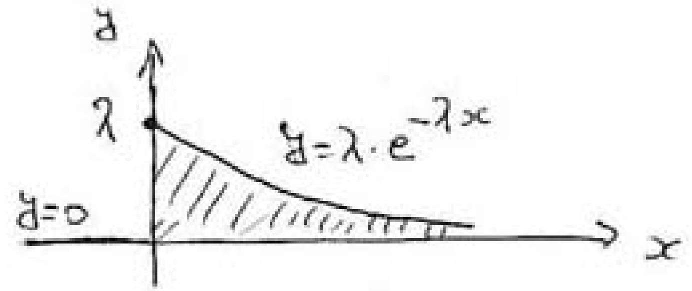
postaje $a \cdot \frac{1}{\lambda} = 1$, tj. $a=\lambda$.

To nas upućuje na sljedeću definiciju.

Definicija 2. Kažemo da slučajna varijabla X ima **eksponencijalnu** razdiobu s **parametrom** $\lambda>0$, ako joj je funkcija gustoće vjerojatnosti

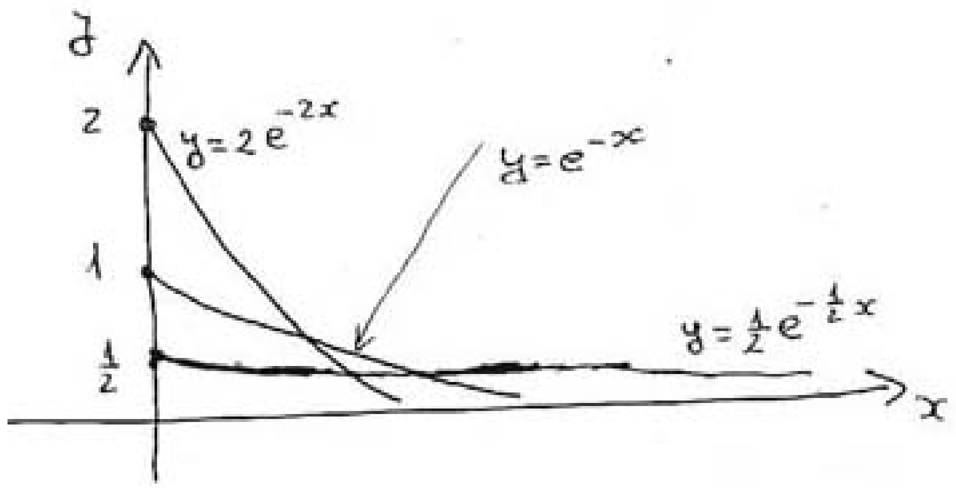
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \text{ za } x>0$$
$$= 0, \quad \text{inače.}$$

Ako je tako, pišemo X ~E(λ).



Dakle, ima beskonačno mnogo eksponencijalnih razdioba (čak neprebrojivo mnogo), ali sve su slične i parametrizirane su pozitivnim parametrom λ. Nabrojili smo više različitih (ali sličnih) pojava koje se približno ponašaju prema eksponencijalnom zakonu. Parametar λ Razlikuje medjusobno te pojave (žarulje različitih kvaliteta, stranice različitih posjećenosti, rzličite radioaktivne materije i sl.).

Primjer 6. Nacrtajmo u istom koordinatnom sustavu i uočimo međusobni odnos funkcija gustoće eksponencijalnih razdioba za $\lambda=1$, $\lambda=1/2$, $\lambda = 2$.



Uočavamo da je krivulja to strmija što je parametar λ veći, tj. brže se približava *x*-osi. Ako to primijenimo na činjenicu da *X* registrira vrijeme trajanja, zaključujemo da bi vrijeme (dakle i prosječno vrijeme) trajanja moglo biti obrnuto proporcionalno s λ. To ćemo sada i dokazati tako što ćemo pokazati da je,
ako je X~E(λ), onda je
E(X) = 1/λ.
Naime:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = (-xe^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda})\Big|_0^{\infty} = 0 - (-0 - 1/\lambda) = \frac{1}{\lambda}.$$

(pažljivo provjerite preskočene korake u gornjem računu; uputa: riječ je o parcijalnoj integraciji i L'Hospitalovu pravilu; gdje se u računu primjenjuje da je λ>0?).
Slično, ali tehnički nešto teže dobije se:

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Prije računanja vjerojatnosti odredimo funkciju distribucije *F* eksponencijalne razdiobe.

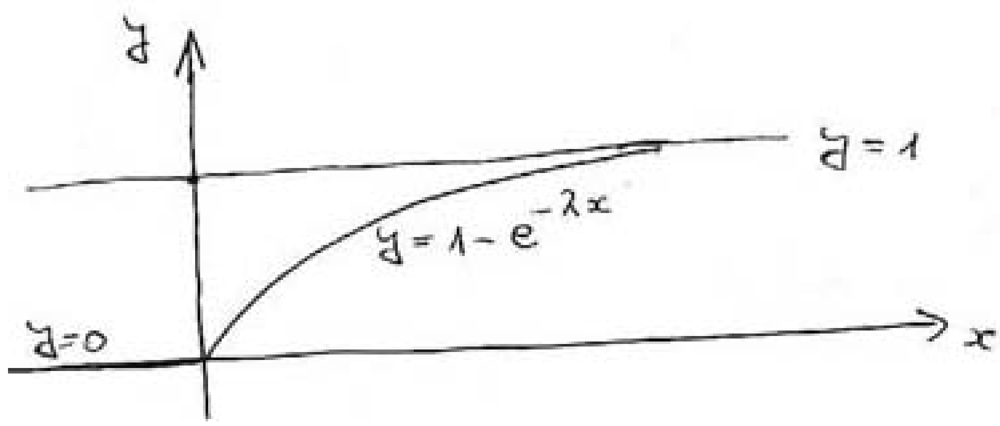
F(x) = 0, za nepozitivne *x*

$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

Dakle, za pozitivne *x* je
F(x) = 1 – $e^{-\lambda x}$.

Nacrtajmo sliku.



Vidimo da graf funkcije na početku naglo raste, a poslije se smiruje. To znači da se vjerojatnost dosta rano potroši (objasnite što to praktički znači).

Primjer 7. Prosječno vrijeme rada žarulje je 800 sati. Odredimo vjerojatnost:
a) da žarulja radi bar 800 sati
b) da žarulja radi manje od 600 sati.

c) da žarulja radi između 500 i 1 000 sati.

Prije rješavanja pokušajte na ova pitanja odgovoriti odoka.
Da bismo riješili ovaj problem prihvatit ćemo pretpostavku da je vrijeme trajanja žarulje eksponencijalno distribuirano. Dakle, ako slučajna varijabla X registrira vrijeme trajanja žarulje, onda je:

X~E(1/800).

Tu smo izabrali λ=1/800 jer prosječno vrijeme trajanja 800 (sati), a taj broj odgovara očekivanju slučajne varijable X, a ono je $1/\lambda$.
Sad se problemi mogu shvatiti ovako:
a) $p(X \geq 800) = p(800<X<\infty) = 1-F(800) = 1-(1-e^{-800/800}) = 0.3679$ (na 4 decimalna mjesta)
b) $p(X<600) = p(-\infty<X<600) = F(600)-0 = 1-e^{-600/800} = 0.5276$
c) $p(500<X<1\,000) = F(1\,000)-F(500) = (1-e^{-1000/800})-(1-e^{-500/800}) = 0.2488$.

Normalna (Gaussova) razdioba.

To je najvažnija razdioba u teoriji, ali i u primjeni vjerojatnosti. Tu razdiobu (približno) imaju mnoge slučajne varijable koje nastaju u praksi, primjerice slučajna varijabla koja
a) registrira grješku pri mjerenju
b) registrira rezultat mjerenja (na pr. mase, visine, postotka, inteligencije, …)
c) registrira rezultate pri dobro odmjerenom pismenom ispitu itd.
S druge strane, do ove razdiobe može se doći statistički (o čemu će više biti riječ poslije). Naime kad se izvodi veći broj nezavisnih mjerenja neke veličine, pa se gleda prosječan rezultat, dolazi se do normalne razdiobe (približno, a u limesu točno; to se može točno matematički opisati).

Razmotrimo nekoliko **heurističkih razloga** koji nam daju naslutiti da će se grješke pri mjerenju ponašati prema normalnom zakonu (poslije ćemo točno reći o kakvoj je razdiobi riječ).
Neka slučajna varijabla X registrira grješku pri mjerenju (koju ne možemo egzaktno opisati jer nastaje slučajno, čak i kod najpreciznijih instrumenata) i neka je f funkcija gustoće od X. Tada je prirodno, uz činjenicu da je površina ispod grafa od f jednaka 1, predpostaviti sljedeće:

1. grješke teoretski mogu biti po volji velike, pa je f definirana i pozitivna za sve realne brojeve x.

2. grješke su simetrično raspoređene oko 0, pa je f **parna funkcija**.

3. najvjerojatnije su grješke oko nule, a kako idemo dalje vjerojatnost da greška bude u nekom malom intervalu stalne duljine, smanjuje se. Zato je f padajuća funkcija za x>0.

4. Trebala bi postojati familija takvih *f*, ovisnih o nekom parametru, koje bi opisivale grješke (jer jedna je funkcija za instrument koji radi male, a druga za neki koji radi velike grješke; ipak te funkcije trebaju biti slične).

Ako bismo tome dodali neke druge razumne uvjete ili da smo (zbog zdravog razuma, ali i statističkih razloga) pretpostavili da f za x>0 eksponencijalno opada, ostale bi nam, kao najjednostavnije, mogućnosti tipa:

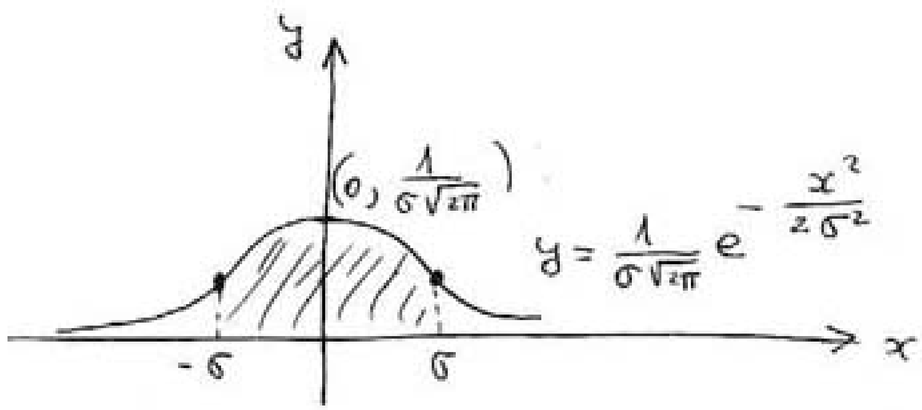
$f(x) = ae^{-bx^2}$, gdje su *a,b* neki pozitivni realni brojevi (x^2 smo stavili radi parnosti, a predznak *minus* da bi funkcija bila padajuća).

Koristeći poznatu činjenicu da je:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \quad (*)$$

lako bismo došli do veze između parametara *a i b*, i do toga da se f može zapisati kao:

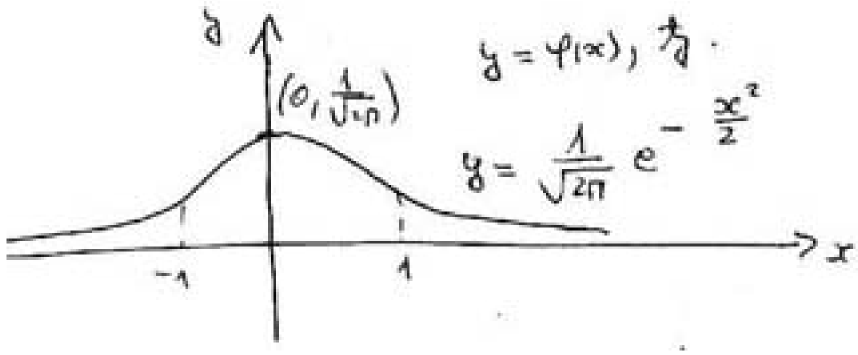
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \qquad \sigma > 0 \quad (**)$$



Graf te funkcije zove se **gaussova krivulja**; ona je

1. **zvonolika** oblika s tjemenom u x=0.
2. simetrična s obzirom na y-os,
3. ima točke infleksije u x=$\pm\sigma$.
4. Odoka vidimo da je površina između tih dviju vrijednosti veća od 1/2, poslije ćemo to izračunati preciznije.
   To ćemo približiti na primjeru.
   Pretpostavimo da je grješka pri očitavanju rezultata na nekom mjernom istrumentu normalno distribuirana uz σ=0.001. Tu činjenicu možemo tumačiti kao: vjerojatnost da grješka bude između –0.001 i 0.001 je veća od 1/2 (poslije ćemo vidjeti da je ona oko 2/3). To znači da je vjerojatnost da grješka bude veća od 0.001 ili manja od –0.001, manja od 1/2 (poslije ćemo vidjeti da je ona oko 1/3).
5. Što je σ veći, krivulja je spljoštenija (površina je rasturenija); to govori o tome da su grješke raspršenije, dakle veće. Obratno, što je σ manje, krivulja je uža i viša; znači grješke su manje, koncentrirane su oko 0.

6. Za slučajnu varijablu X koja ima ovakvu funkciju gustoće kažemo da je **normalna** i pišemo: X~N(0, σ^2).
   Specijalno, ako je σ=1, kažemo da je razdioba **jedinična normalna (**ili **standardna)** i tada pišemo:
   X~N(0,1^2).
   Često jediničnu razdiobu označavamo s T, a njenu funkciju gustoće s φ. Dakle:
   $$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Da je sa (**) zadana funkcija gustoće (tj. da je površina ispod krivulje 1) proizlazi iz (*), samo se kod integriranja primjeni očita zamjena varijable.
Također je očito da sve ove razdiobe imaju očekivanje 0 (zbog simetričnosti); tko hoće to može i dokazati (izravno ili korištenjem svojstva neparnosti).
Lako se može dokazati (parcijalna integracija, zamjena varijable i formula (*)) da je varijanca ove razdiobe σ^2.
Dakle:
Ako je X~N(0, σ^2), onda je
E(X) = 0, i
V(X) = σ^2.

Napomena.

1. Ako graf funkcije f pomaknemo za μ onda se tjeme pomakne za taj isti μ (pomak će biti udesno ako je μ>0, u suprotnom bit će ulijevo). Pomicanjem za μ funkcija postaje:
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$
2. Ovako pomaknuta funkcija također je funkcija gustoće (pomakom se površina ne mijenja). Slučajnu varijablu X koja ima takvu funkciju gustoće pišemo kao:
   X~N(μ,σ^2).
   Pritom se očekivanje također pomakne za μ pa je.
   E(X) = μ.
   Varijanca se ne mijenja (krivulja po izgledu ostaje potpuno ista) pa je:
   V(X) = σ^2.

Sve se to može potvrditi i računom.

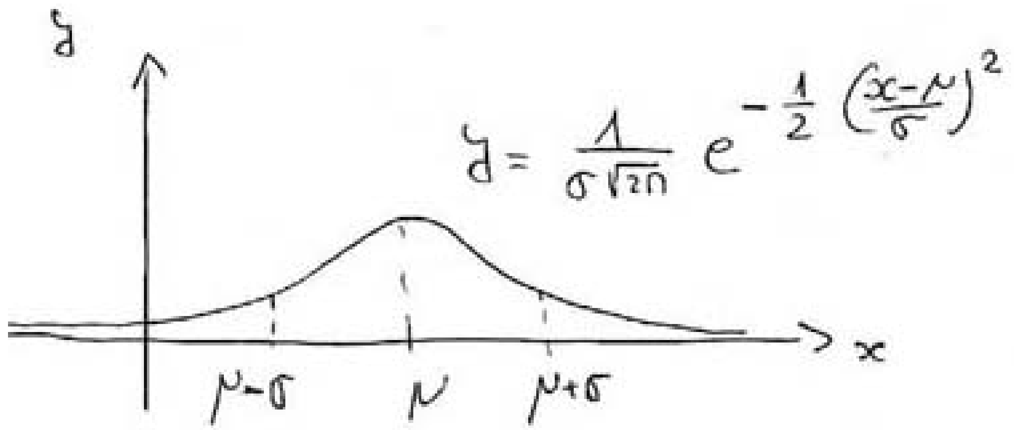
3. Pomaknuta krivulja ima slična svojstva kao i ona početna, samo što je os simetrije pravac s jednadžbom x= μ (a ne više x-os).

Sada imamo konačnu definiciju.

Definicija 3. Kažemo da kontinuirana slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu s parametrima μ i σ^2, ako joj je funkcija gustoće:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} .$$

Pri tom je parametar μ očekivanje, a parametar σ^2 varijanca te slučajne varijable.



Računanje vjerojatnosti kod normalne razdiobe.

Već smo vidjeli da se vjerojatnost kod kontinuirane razdiobe najlakše računa ako nam je poznata funkcija distribucije (tada se vjerojatnost da slučajna varijabla poprimi rezultat na nekom intervalu svodi na oduzimanje vrijednosti te funkcije u rubovima tog intervala).
U slučaju normalne razdiobe **ne može se funkcija distribucije zapisati** pomoću poznatih elementarnih funkcija (već samo pomoću beskonačnih redova potencija ili nekih drugih funkcija čije se vrijednosti ne mogu lako računati, na primjer, nisu dostupne na svakom kalkulatoru; jasno je da se, koristeći na primjer Simphsonovu metodu, može napraviti program koji će po volji precizno računati vrijednosti te funkcije).
Zato su obično vrijednosti funkcije distribucije normalne razdiobe **tabelirane**. Tu je dobra vijest da **ne treba tabelirati te vrijednosti za sve** normalne razdiobe (kojih ima neprebrojivo mnogo i ovisni su o dvama spomenutim parametrima), već je **dovoljno** tablicu načiniti za jediničnu normalnu razdiobu.
Kako je jedinična normalna razdioba simetrična s obzirom na *y*-os, dovoljno će biti tabelirati vrijednosti **za pozitivne** *x*. Sad ćemo pobliže to objasniti.

Kako je poznato, funkciju distribucije *F*, neke slučajne varijable *X*, definirana je kao:
$F(x) = p(X<x)$
i ona je primitivna funkcija funkcije gustoće f i može se zapisati i kao:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

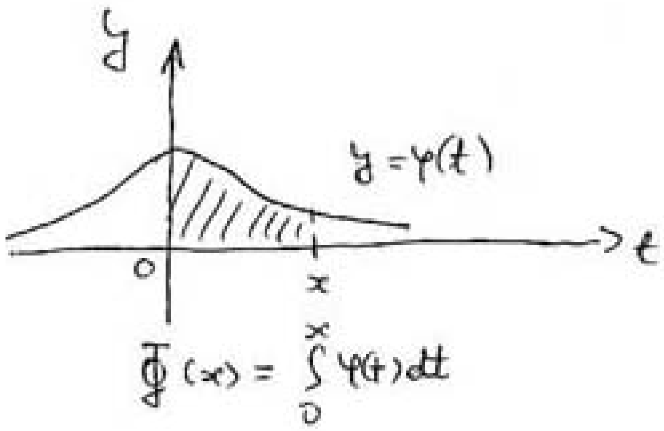
(što je površina ispod grafa od *f* do *x*).
U slučaju jedinične normalne razdiobe, površina do 0 je 1/2 pa možemo pisati:

$$F(x) = 1/2 + \int_{0}^{x} \varphi(t)dt ,$$

gdje smo uvažili činjenicu da funkciju gustoće jedinične normalne razdiobe pišemo oznakom φ
(gornja je jednakost geometrijski jasna za $x>0$, međutim ona vrijedi i za $x<0$; onda je vrijednost integrala negativna).
Označimo;

$$\Phi(x) := \int_{0}^{x} \varphi(t)dt$$

(površina ispod grafa funkcije φ od 0 do x).

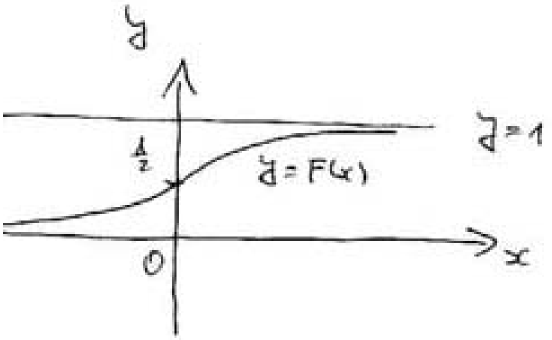


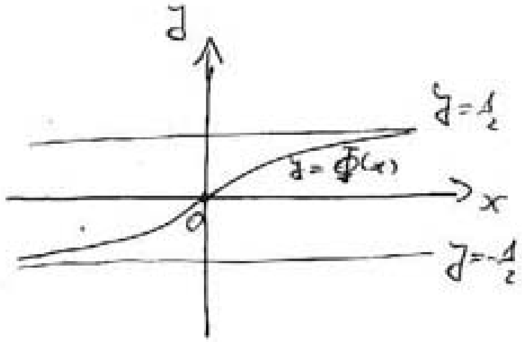
Dakle:
$F(x) = 1/2 + \Phi(x)$, odnosno $\Phi(x)=F(x)-1/2$
(to vrijedi za sve x).
Kako je *F* primitivna funkcija od φ, a Φ se od nje razlikuje **samo za konstantu** (za 1/2), onda je i Φ primitivna funkcija od φ, pa se i pomoću nje mogu računati vjerojatnosti kod jedinične normalne razdiobe.
Dakle, neka je *T* jedinična normalna razdioba i a,b bilo koja dva realna broja takva da je $a<b$.
Tada je.

$$p(a<T<b) = \int_{a}^{b} \varphi(x)dx$$ (prema definiciji vjerojatnosti kod kontinuirane razdiobe)

$= F(b)-F(a)$ (gdje je *F* pripadna funkcija distribucije)
$= (1/2 + \Phi(b)) - (1/2 + \Phi(a))$
$= \Phi(b) - \Phi(a).$

Funkcija Φ zove se **Laplaceova funkcija**.





Zašto nam je Φ zgodnija od F za računanje vjerojatnosti?
Zato što je ona neparna funkcija:

$\Phi(-x) = \Phi(x)$,

za sve x (to proizlazi iz njene definicije, ali i iz geometrijske interpretacije), pa, kad tabeliramo njene vrijednosti za pozitivne x, pripadajuće vrijednosti za negativne x odmah dobivamo. To bismo mogli i za F, ali bi tada formula bila drukčija:

F(-x) = 1-F(x),

što je, svakako, teže uvijek računati nego samo staviti negativni predznak. Treba ipak napomenuti da je u mnogim tablicama tabelirana F, a ne Φ .
Osnovna geometrijska razlika između tih dviju funkcija jest da je graf od F između 0 i 1, a graf od Φ između –1/2 i 1/2 . Jednakostima:

$F(\infty)=1$, $F(-\infty)=0$, $F(0)=1/2$

Odgovaraja redom

$\Phi(\infty)=1/2$, $\Phi(-\infty)=-1/2$, $\Phi(0)=0$

Jasno je da ne možemo tabelirati svaku vrijednost za pozitivne x, već samo neke (dovoljno gusto), pa ostaje problem dokle ćemo daleko raditi. Tu imamo sreću što funkcija φ eksponencijalno opada pa će vrlo brzo ispod nje ostati beznačajno malo površine. Tako se obično tabelira do x=4 (a može i do x=3). Sad je jasno da će se rezultati za iste vjerojatnosti razlikovati ovisno o tome kako su precizno tablice izrađene (danas uglavnom svi bolji kalkulatori mogu računati vrijednost funkcije F, a katkad i Laplaceove funkcije).

Pokažimo na nekoliko primjera kako se koristi Laplaceova funkcija za računanje vjerojatnosti.

Primjer 8. Neka je X slučajna varijabla s jediničnom normalnom razdiobom. Odredimo:

(i) $p(0<X<1.42)$ (v) $p(-1.79<X<-0.54)$ (ix) $p(-5<X<1.42)$.
(ii) $p(-0.73<X<0)$ (vi) $p(X>1.13)$
(iii) $p(-1.37<X<2.01)$ (vii) $p(|X|<0.5)$
(iv) $p(0.65<X<1.26)$ (viii) $p(X<1.42)$

(i) $p(0<X<1.42) = \Phi(1.42) - \Phi(0) = \Phi(1.42) = 0.4222$

(ii) $p(-0.73<X<0) = \Phi(0) - \Phi(-0.73) = 0-(-(\Phi(0.73)) = \Phi(0.73) = 0.2673$

(iii) $p(-1.37<X<2.01) = \Phi(2.01)- \Phi(-1.37) =\Phi(2.01)+ \Phi(1.37)=0.8925$

(iv) $p(0.65<X<1.26) = \Phi(1.26)- \Phi(0.65) = 0.3962-0.2422=0.1540$

(v) p(-1.79<X<-0.54) = Φ(-0.54)- Φ(-1.79) = Φ(1.79)- Φ(0.54) = 0.2579

(vi) p(X>1.13) = Φ(1.13<X<∞) = 0.5 - Φ(1.13) = 0.1292

(vii) p(|X|<0.5) = p(-0.5<X<0.5) = Φ(0.5) - Φ(-0.5)=2Φ(0.5)=0.3830

(viii) p(X<1.42) = p(-∞<X<1.42) = Φ(1.42)-(-0.5) = Φ(1.42)+0.5 = 0.9222 (vidi a))

(ix) Tu je rezultat kao i u prethodnom primjeru (približno) jer je Φ(-5) praktično jednako –0.5. Slično, ako je a>4, onda je Φ(a) = 0.5 (uz veliku točnost).

Napomena.
1. Svi bi rezultati bili ostali isti da smo umjesto znakova <, > stavili na nekim (ili svim) mjestima znakove $\leq, \geq$. To je zato što je riječ o kontinuiranoj razdiobi.
2. Svaki od ovih rezultata i pojedini brojevi koji u njima sudjeluju imaju geometrijske interpretacije koje bi trebalo razumjeti.

Pokazali smo kako se računa vjerojatnost standardne normalne razdiobe. Sad ćemo vidjeti kako se računa vjerojatnost bilo koje normalne razdiobe.
Neka je X~N(μ, σ^2), i neka su *a, b* realni brojevi takvi da je *a*<*b*. Tada je:

p(a<X<b) = $\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ (nakon zamjene varijable $\frac{x-\mu}{\sigma} = t$)

$$= \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{(ispod integrala je funkcija } \varphi)$$

$$= \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}).$$

Dakle, računanje vjerojatnosti po volji odabrane normalne razdiobe, svodi se na računanje vjerojatnosti jedinične normalne razdiobe tj. do oduzimanja vrijednosti funkcije Φ. Ovaj smo rezultat izveli pomoću zamjene varijable u određenom integralu, međutim on ima i druga objašnjenja, na primjer geometrijska (lako se vidi da bilo koja normalna razdioba pomakom suprotno od očekivanja, potom dijeljenjem sa standardnom devijacijom postaje jedinična normalna razdioba; to grafovi funkcija gustoće lijepo prate).

Pokažimo to na primjeru.

Primjer 9. Težina neke populacije normalno je distribuirana s prosječnom težinom 66 kg i standardnom devijacijom 5kg. Odredimo vjerojatnost da slučajno odabrani predstavnik te populacije ima:
a) težinu između 65 i 70 kilograma.
b) težinu veću od 72 kg.

Neka slučajna varijabla *X* registrira težinu slučajno odabranog predstavnika te populacije. Iako je ovo situacija iz života na nju ćemo primjeniti normalnu razdiobu (koja odgovara idealnim uvjetima). Zato je

$X \sim N(65,5^2)$,

jer očekivanje treba biti prosječna vrijednost, a standardna je devijacija propisana u zadatku (poslije ćemo, u statistici, vidjeti kako se u takvim praktičnim slučajevima određuje standardna devijacija).

Zadatke možemo shvatiti ovako:

a) $p(65<X<70) = \Phi(\frac{70-66}{5}) - \Phi(\frac{65-66}{5})$

$= \Phi(0.8) - \Phi(-0.2)$

$= 0.3674$

b) $p(X>72) = 0.5 - \Phi(\frac{72-66}{5})$

$= 0.5 - \Phi(1.2)$

$= 0.1151.$

Tu smo 0.5 uzeli jer je tu gornja granica beskonačna, a $\frac{\infty - 66}{5} = \infty$ (ta se jednakost ispravno shvaća pomoću limesa).

Pravilo "tri sigme".

Najvažnije svojstvo normalne razdiobe u primjenama, jest to da interval unutar kojega se nalazi gotovo 100% svih vrijednosti slučajne varijable, **ovisi samo o očekivanju i standardnoj devijaciji** (to je za po 3 standardne devijacije lijevo i desno od očekivanja).

Preciznije, neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Tada je

$p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$

Također je.

$p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544$

$p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$

Znači s 95% sigurnošću možemo tvrditi da se neka veličina normalno distribuirana nalazi za najviše 2 standardne devijacije lijevo ili desno od očekivanja (to znači da je u tom intervalu više od 95% površine ispod pripadne krivulje.

Slično, vidimo da za 1 standardnu devijaciju lijevo i desno od oćekivanja ima oko 2/3 površine ispod te krivulje (to je ono što smo ranije odoka procjenjivali da je više od jedne polovine).

Primjer 10. Odredimo interval unutar kojeg se nalazi težina slučajno odabrane osobe iz Primjera 9:

(i) s vjerojatnošću oko 0.68
(ii) s vjerojatnošću oko 0.95
(iii) gotovo 100%

U Primjeru 9 je riječ o normalnoj razdiobi s $\mu=66$ i $\sigma=5$, pa je, prema pravilima "jedan sigma", "dva sigma" i "tri sigma":

(i) [66-5,66+5]=[61,71], tj.

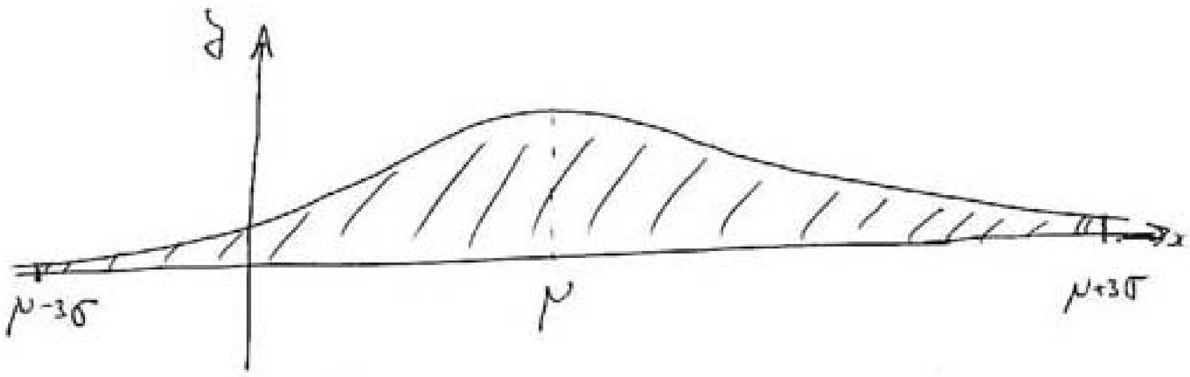
p(težina slučajno izabrane osobe je između 61 i 71) $\approx$ 0.68

(ii) $[66-2\cdot 5,\ 66+2\cdot 5]$=[56, 76], tj.

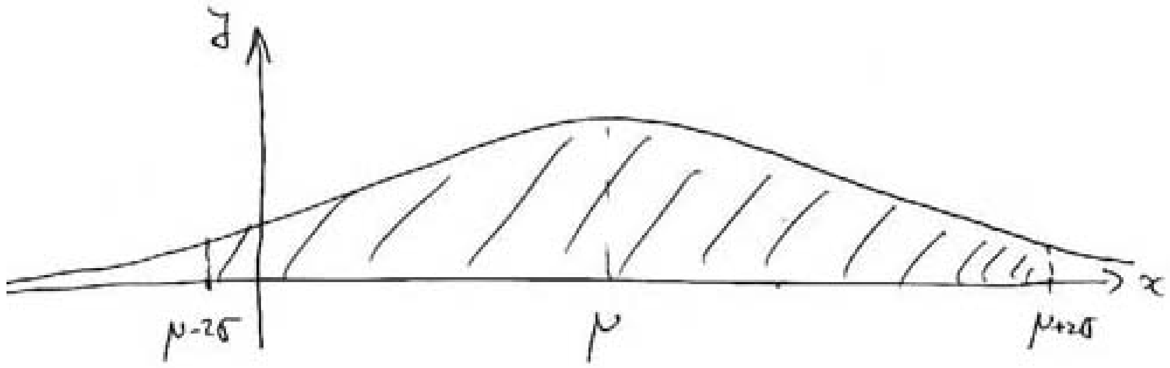
p(težina slučajno izabrane osobe je između 56 i 76) $\approx$ 0.95

(ii) $[66-3\cdot 5,\ 66+3\cdot 5]$=[51, 81], tj.

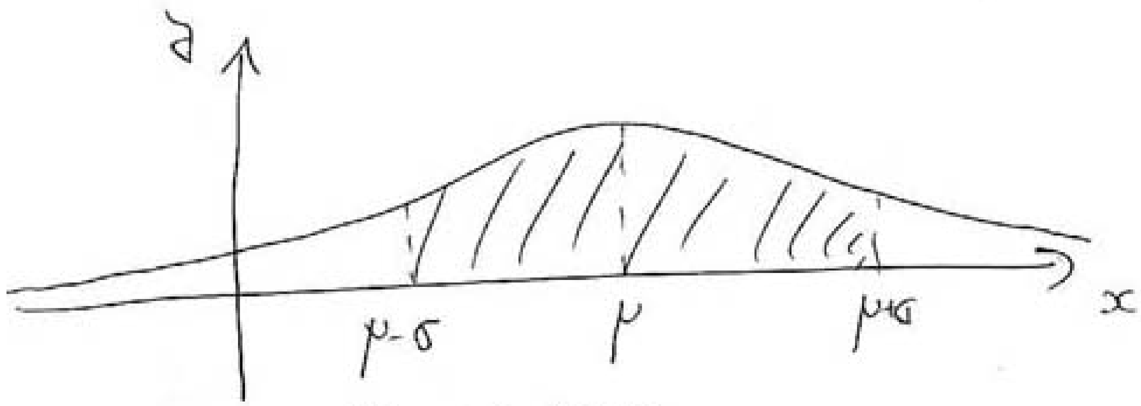
gotovo sve osobe imaju težinu izmedju 51 i 81.



P ≈ 0.9973



P ≈ 0.9544



P ≈ 0.6826